

目次

- スペクトルと振幅・位相
- 複素フーリエ級数展開

★6 パターン情報の成分分析(2) — アナログ信号の分析 (承前)

前回, 周期的なアナログ信号はフーリエ級数展開できることを学んだ。これは,

- そのような信号は無数個の正弦波成分からできている
- フーリエ係数が各正弦波成分の「含有量」(☆1)を表している

ということの意味している。今回は, 種々の信号の成分を実際に分析してみよう。

☆1) 係数は負の値もとることを考えるとこの言い方はいいかげん。

★6.4 スペクトルと振幅・位相

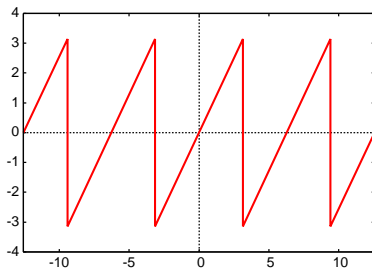
あるアナログ信号をフーリエ級数展開してフーリエ係数 a_k, b_k を求めたら, スープの例のように成分のグラフを描くことができる。このフーリエ係数あるいはそれをもとに描いた図のことを**スペクトル**(☆2)という。以下に例を示す。

☆2) スペクトル: 仏語の spectre が由来らしい。英語では spectrum.

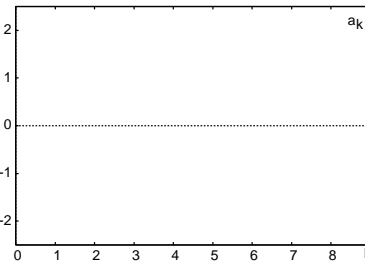
虹は, 光のスペクトルが目に見えるようになったものである。

● のこぎり波とそのスペクトル

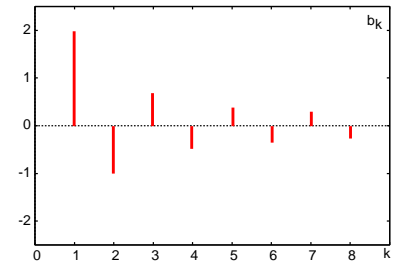
周期 2π ののこぎり波



$$a_k = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

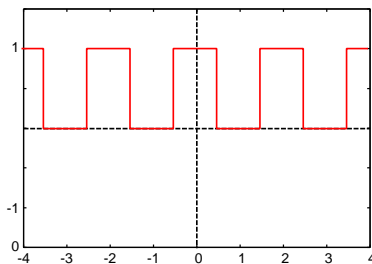


$$b_k = (-1)^{k+1} \frac{2}{k} \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

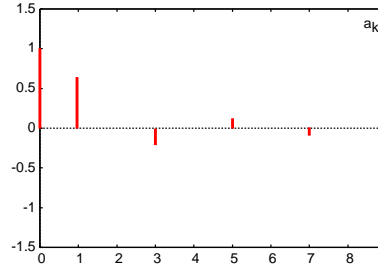


● 方形波とそのスペクトル

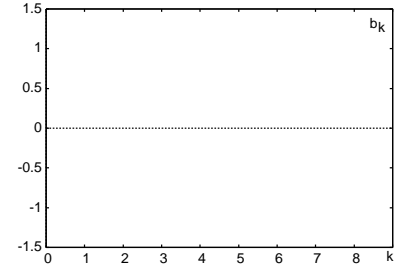
周期 2 の方形波



$$a_0 = 1, \quad a_k = \frac{2}{\pi k} \sin \frac{\pi k}{2}$$



$$b_k = 0 \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$



上記のようにフーリエ係数 a_k, b_k をそのままグラフに描いたものでは, 波形の特徴を把握しにくい。実用的には, 以下に示すような**振幅スペクトル**と**位相スペクトル**の方が用いられる。

フーリエ級数展開の式から k 番目の正弦波 (周期が元の信号の周期の $\frac{1}{k}$) の成分のみを取り出すと, $a_k \cos \omega_0 kt + b_k \sin \omega_0 kt$ である。三角関数の合成 (☆3) を用いると, これを次のように書き直せる。

☆3) $a \cos \theta + b \sin \theta = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(\theta - \tan^{-1} \frac{b}{a})$

$$a_k \cos \omega_0 kt + b_k \sin \omega_0 kt = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \cos\left(\omega_0 kt - \tan^{-1} \frac{b_k}{a_k}\right) \quad (1)$$

$$= A_k \cos(\omega_0 kt + \theta_k) \quad (2)$$

ただし, $A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$, $\theta_k = -\tan^{-1} \frac{b_k}{a_k}$ とした. これらを用いると, フーリエ級数展開の式を次のように書き直せる.

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(\omega_0 k t + \theta_k) \quad (3)$$

これより, A_k は k 番目の正弦波成分の振幅に相当し, θ_k はその成分の位相に相当することがわかる. そこで, $\{A_k\} (k=0, 1, \dots)$ を振幅スペクトル, $\{\theta_k\} (k=1, 2, \dots)$ を位相スペクトルと呼ぶ (☆4).

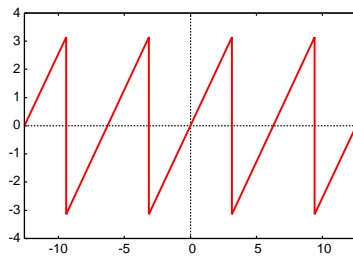
振幅スペクトルと位相スペクトルには, 次のような重要な性質がある.

- ある信号を定数倍 (α 倍) すると, 振幅スペクトルは $|\alpha|$ 倍になる. 位相スペクトルは変化しない.
- ある信号を変数軸方向に平行移動させても (位相を変化させても), 振幅スペクトルは変化しない. 位相スペクトルのみが変化する.

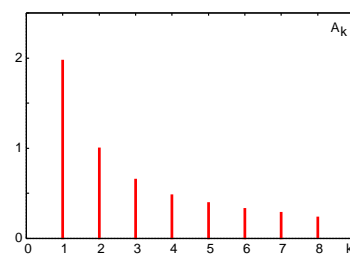
☆4) $A_0 = |a_0|$ とする. 振幅スペクトルのかわりに**パワー**スペクトル $\{A_k^2\}$ もよく用いられる.

例を以下に示す.

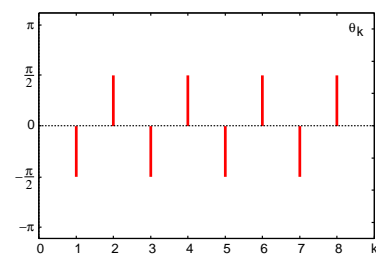
● 前頁と同じのこぎり波



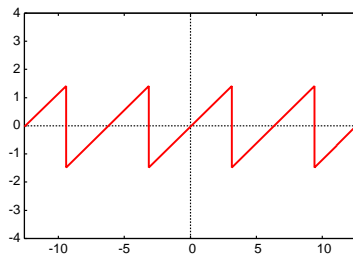
振幅スペクトル



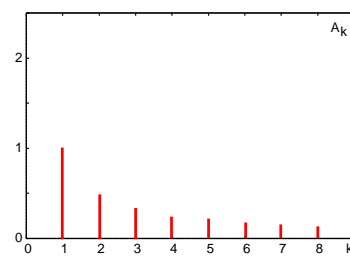
位相スペクトル



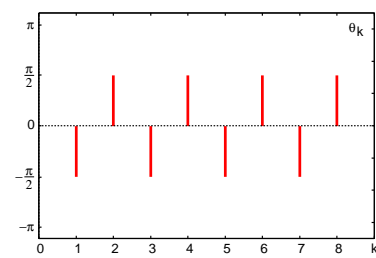
● 振幅を半分にすると...



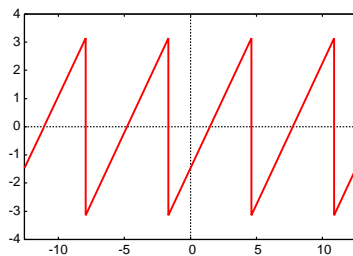
振幅スペクトル



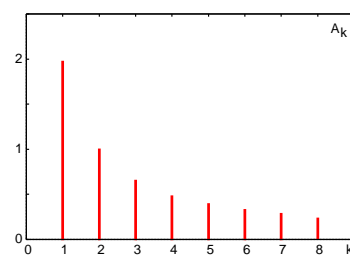
位相スペクトル



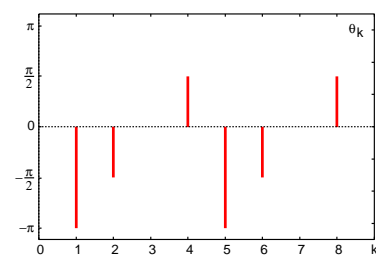
● 位相を変えると...



振幅スペクトル



位相スペクトル



【発展】定数倍した信号の振幅・位相スペクトルに関する性質の証明の概略

周期 T の周期信号 $f(t)$ が前回資料に示すようにフーリエ級数展開できる（フーリエ係数は a_k, b_k ）とする。 α を定数として $g(t) = \alpha f(t)$ とおくと、 $g(t)$ も周期 T の周期信号であるから、 $f(t)$ 同様にフーリエ級数展開できる。 そのフーリエ係数を \tilde{a}_k, \tilde{b}_k に対応させて \tilde{a}_k, \tilde{b}_k と表すことにすると、

$$\tilde{a}_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} g(t) \cos \omega_0 k t dt = \alpha \times \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos \omega_0 k t dt = \alpha a_k \quad (4)$$

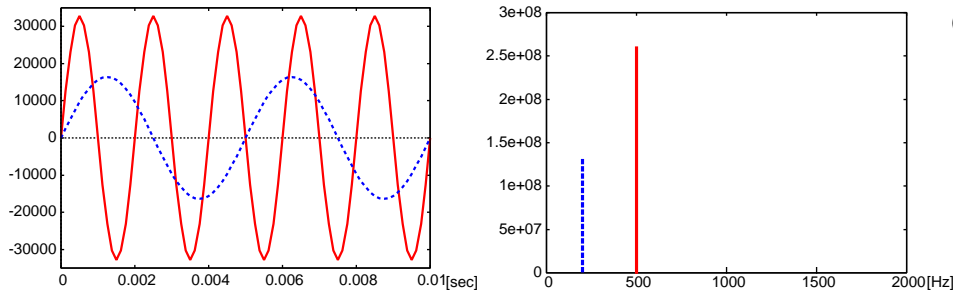
となることがわかる。 同様にして、 $\tilde{b}_k = \alpha b_k$ 。 したがって、

$$\sqrt{\tilde{a}_k^2 + \tilde{b}_k^2} = \sqrt{\alpha^2(a_k^2 + b_k^2)} = |\alpha| \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \quad \tan^{-1} \frac{\tilde{b}_k}{\tilde{a}_k} = \tan^{-1} \frac{b_k}{a_k} \quad (5)$$

となり、 $g(t)$ の振幅スペクトルは $f(t)$ のその $|\alpha|$ 倍であり、 $g(t)$ の位相スペクトルは $f(t)$ のそれに等しい。

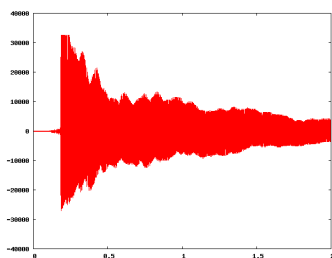
次は、実際の音響信号の例をみてみよう。 下図右は、下図左の2つの正弦波（実線：周波数 500 Hz, 破線：周波数 200 Hz）それぞれの振幅スペクトルである（☆5）。 振幅スペクトルからそれぞれ波の周波数（音の高さに対応）と振幅（音の大きさに対応）を読み取れることがわかる。

☆5) 横軸の単位には、フーリエ係数の番号 k のかわりに周波数 [Hz] を用いている。 いずれの波も単一の正弦波成分のみからできているので、対応する周波数の値のみが大きく（他は 0 に）なっている。

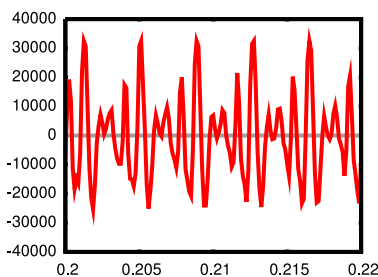


次は、シンセサイザで合成したギター音の例（上記の正弦波の例もこの例も、実際の信号はアナログ信号ではなく、周期信号でもない。したがって、フーリエ級数展開で扱える信号ではない。実際には、次回登場する「離散フーリエ変換」を適用してスペクトルを計算している。 ）。

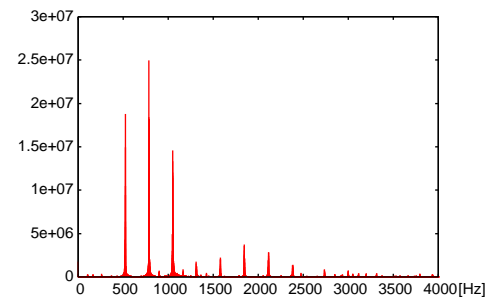
● ギター音 C の波形



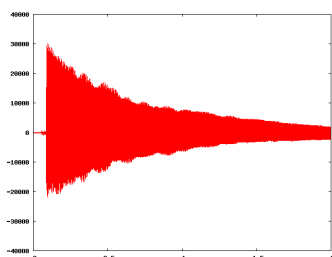
その一部拡大



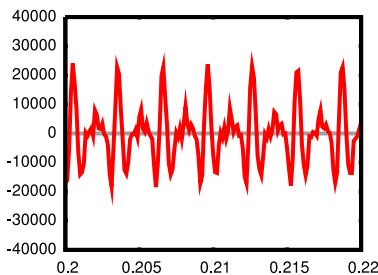
振幅スペクトル



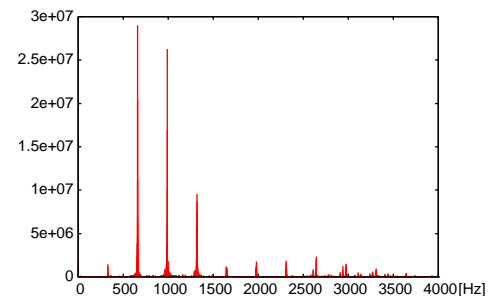
● ギター音 E の波形



その一部拡大



振幅スペクトル



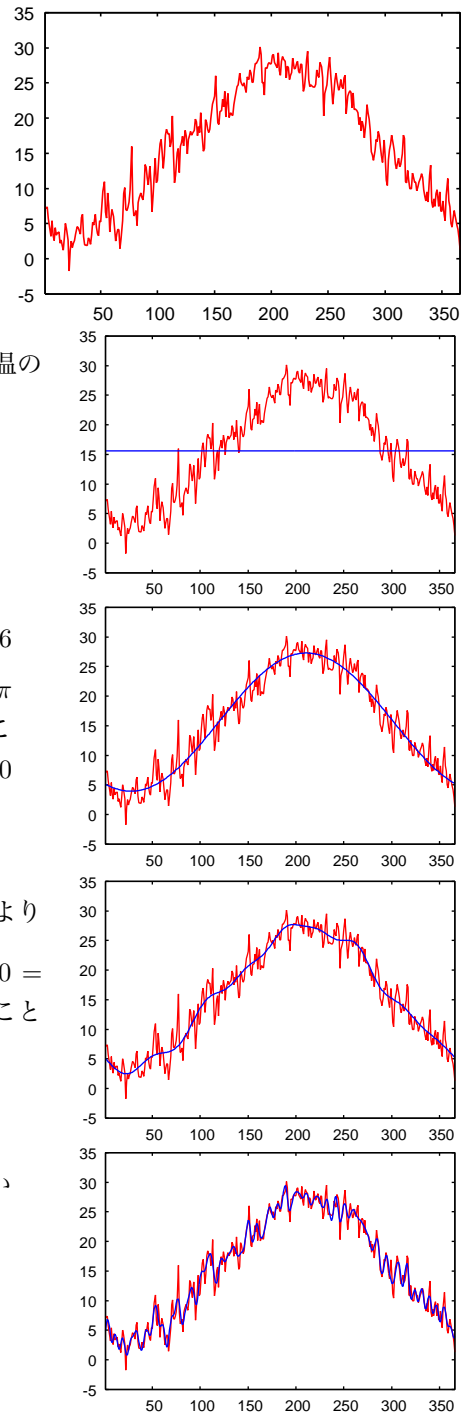
右図は、2004年の大津市の日平均気温を表している。変数の単位は[日]であり、値の単位は[度]である。この信号を $f(t)$ とおくと、式(3)のように展開することができる。実際に振幅スペクトルと位相スペクトルを求めて周波数の低い成分による近似を行なってみると、次のような結果が得られる（この信号は、366個の値から成る離散信号であるから、音響信号の例と同様に、実際にはフーリエ級数展開ではなく離散フーリエ変換を適用している）。

● $f_0(t) = 15.62$ による近似。15.62 という値は、この1年の気温の平均に対応している。

● $f_1(t) = 15.62 + 11.66 \cos\left(\frac{2\pi}{366}t + 2.68\right)$ による近似。周期366日の正弦波の成分だけで気温変化を表している。 $\frac{2\pi}{366}t + 2.68 = \pi, 2\pi$ を解くと $t = 26.9, 209.9$ となるので、おおまかな傾向として、この年一番寒かったのは27日目（1月末）頃、一番暑かったのは210日目（7月末）頃と判断できる。

● $f_{10}(t) = 15.62 + \sum_{k=1}^{10} A_k \cos\left(\frac{2\pi}{366}kt + \theta_k\right)$ による近似。 $f_1(t)$ よりも近似の精度がよくなっている。 $k = 10$ の成分の周期は $366/10 = 36.6$ 日だから、36.6日以上長い周期の成分のみで近似していることになる。

● $f_{50}(t) = 15.62 + \sum_{k=1}^{50} A_k \cos\left(\frac{2\pi}{366}kt + \theta_k\right)$ による近似。細かい変動まで近似されるようになってきている。



★ 6.5 複素フーリエ級数展開

フーリエ級数展開は、次のように複素数の範囲で行なうこともできる (☆6).

周期 T の周期信号 $f(t)$ は次式のように複素フーリエ級数展開できる.

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{i\omega_0 kt} \quad (6)$$

ただし, $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ である. フーリエ係数 C_k は次式で与えられる (☆7).

$$C_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-i\omega_0 kt} dt \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (7)$$

i は虚数単位である. ここで, 複素数の性質を復習しておこう.

ある複素数を $z = x + iy$ とおくと...

z の実部: $\text{Re}[z] = x$, z の虚部: $\text{Im}[z] = y$, z の共役複素数: $\bar{z} = x - iy$

z の絶対値: $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$, z の偏角: $\arg z = \tan^{-1} \frac{y}{x}$

任意の複素数 z は $z = A e^{i\theta}$ という形で表せる. ただし, $A = |z|$, $\theta = \arg z$.

オイラーの公式: $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$

この公式より次の関係が導かれる. $\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$, $\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$,

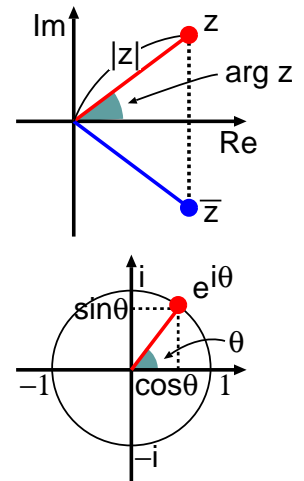
オイラーの公式を用いると, 複素と実のフーリエ係数の間に $2C_0 = a_0$, $2C_k = a_k - ib_k$ ($k = 1, 2, \dots$) という関係が成り立つことがわかる (☆8). 両者の関係は, 絶対値と偏角で表すとより明確になる.

$$2|C_k| = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} = A_k \quad \arg C_k = -\tan^{-1} \frac{b_k}{a_k} = \theta_k \quad (8)$$

つまり, 複素フーリエ係数 C_k の絶対値は k 番目の正弦波の振幅 (の半分) を表し, 偏角は位相を表している (☆9).

☆6) 変数も値も実数の信号は実数の範囲で展開できるから複素数を持ち出さなくともよいのだが, 複素数で考えた方が見通しがよくなるので, 複素数で表す方が一般的である.

☆7) 式 (7) の指数部に負号がついていることに注意.



☆8) 式 (7) で $e^{-i\omega_0 kt} = \cos \omega_0 kt - i \sin \omega_0 kt$ と変形して...

☆9) 前出の振幅スペクトルは, $|C_k|$ のグラフとして描くことが多い. 位相スペクトルは同じ.

今回の宿題

注意: (1) で描いたグラフは A4 の紙に印刷して、宿題用紙とは別に (ホチキスでとめたりせずに) 提出してください。両方に名前等を書くのを忘れずに。宿題用紙の方には、最低限、「(1) gnuplot でグラフを描くと別紙のようになった。」というように一言書こう。

(1) 右の内容の t012345.txt (t012345 は実際には自分の学籍番号) というファイル名のテキストファイルを作成し、gnuplot でそのグラフを描きなさい。gnuplot の使い方については高橋のウェブページの「いろいろ」から「gnuplot の使い方」をたどって参考にしたらよい。また、この授業のページにこの問題に関する補足があるので必ず参照し、次の条件でグラフを描くこと。

- 横軸の範囲は $[-3, 3]$, 縦軸の範囲は $[-0.5, 1.5]$ とする
- 折れ線グラフとなるように描画スタイルを指定する
- 横軸縦軸に相当する直線も描画する

以降の問題文では、グラフの横軸に対応する変数を t として、このグラフが表す関数を周期関数に拡張したものを $f(t)$ と表す。

(2) $f(t)$ の基本周期 T を答えなさい。また、 $-\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2}$ の範囲で $f(t)$ を t の式で表しなさい。

-3	0
-2.5	0
-2.5	0.5
-1.5	0.5
-1.5	1
-1	1
-1	0
-0.5	0
-0.5	0.5
0.5	0.5
0.5	1
1.0	1
1.0	0
1.5	0
1.5	0.5
2.5	0.5
2.5	1
3	1

(3) $f(t)$ をフーリエ級数展開したときの展開係数 $a_0, a_k, b_k (k = 1, 2, \dots)$ を求めなさい。記号の定義は講義資料の通りとする。

次回の宿題

注意: 以下の $f(t)$ は、↑のものを指している。(2) で描いたグラフは A4 の紙に印刷して、宿題用紙とは別に (ホチキスでとめたりせずに) 提出してください。両方に名前等を忘れずに。

(0) (前回提出した宿題の解答 (↑のもの) が間違っていたという人のみ) 前回の宿題をやり直しなさい。

(1) $f(t)$ のフーリエ級数展開を n 番目の成分までで打ち切ったものを $f_n(t)$ と表すとき、 $f_8(t)$ を式で表しなさい。

(2) gnuplot を用いて $f(t)$ のグラフと $f_0(t)$ から $f_8(t)$ までの全てのグラフを重ねて描いて説明し、考察しなさい。グラフは、前回の宿題の (1) に示された条件に加えて、標本点数を 1000 として描くこと（この授業のページの補足をよく読もう）。

(3) (おまけ課題：やらなくても減点にはなりません。やったら棒茄子?) (2) を正しくできてあまり元の関数に近くならなくて嬉しくないかもしれない。そこで、C 言語でプログラムを書いて、もっと大きな n に対する $f_n(t)$ の値を求めてグラフを描いてみよう。この問題に取り組む場合は、作ったソースプログラム、どのように実行したか、得られた結果 (グラフを $f(t)$ と重ねよう) など必要な情報をレポートにまとめること。

みほん?

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <math.h>

#define T ひみつ // 基本周期
#define OMEGA0 ((2.0*M_PI)/T) // 基本周期分の値の数
#define NSAMPLES 1000

double ak(int k);
double bk(int k);

int main(int argc, char **argv)
{
    double dt = T / (double)NSAMPLES; // 値の間隔
    double t, ft;
    int it, ik, n;

    if(argc != 2){
        printf("usage: %s n\n", argv[0]);
        exit(EXIT_FAILURE);
    }
    n = atoi(argv[1]);

    for(it = 0; it < 3*NSAMPLES; it++){ // 3 周期分の値を計算
        t = -3.0*T/2.0 + (double)it*dt;
        ft = ひみつ; // a_0/2
        for(ik = 1; ik <= n; ik++){

            }
        printf("%f %f\n", t, ft);
    }

    return 0;
}

// フーリエ係数 a_k の値
double ak(int k)
{
}

// フーリエ係数 b_k の値
double bk(int k)
{
}
```
