目次

★ 5　パターン情報の成分分析 (1) — 直交展開　（承前）

★ 5.6　離散コサイン変換

パターン情報の分析やデータ圧縮によく用いられる直交展開の例をあげる．

離散コサイン変換 (☆ 1):N 次元ベクトル $\boldsymbol{e}_k$ $(k = 0, 1, \ldots, N-1)$ を次のように定めると，$\{\boldsymbol{e}_0, \boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_{N-1}\}$ は正規直交基底となる．

$$\boldsymbol{e}_0 = \sqrt{\frac{1}{N}}(1, 1, \ldots, 1) \tag{1}$$

$$\boldsymbol{e}_k = \sqrt{\frac{2}{N}}\left(\cos\frac{\pi k}{2N}, \cos\frac{3\pi k}{2N}, \ldots, \cos\frac{(2N-1)\pi k}{2N}\right) \quad (k = 1, \ldots, N-1) \tag{2}$$

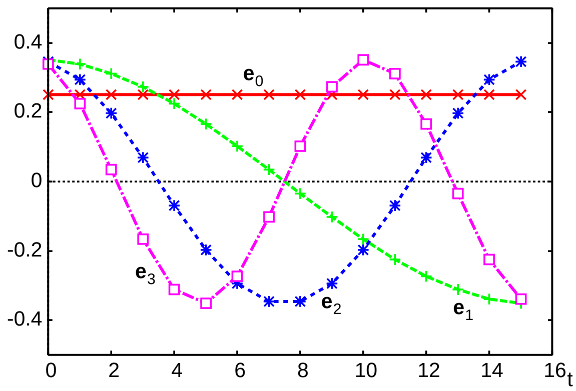
したがって，$\{\boldsymbol{e}_k\}$ を用いると，任意の N 次元実ベクトル $\boldsymbol{f} = (f_0, f_1, \ldots, f_{N-1})$ を次式のように一意に展開できる．

$$\boldsymbol{f} = c_0\boldsymbol{e}_0 + c_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + c_{N-1}\boldsymbol{e}_{N-1} \tag{3}$$

ただし，展開係数 c_k は $c_k = \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{e}_k$ で与えられる．$\boldsymbol{f}$ から $c_0, c_1, \ldots, c_{N-1}$ を求める演算を離散コサイン変換という．

☆ 1) 離散コサイン変換: Discrete Cosine Transform. DCT と略す．DCT は条件の設定の仕方によっていくつか異なる定義があり，定数倍した形で表すこともあるので，ここに示した式とは異なる式で定義されることも多い．

離散コサイン変換は，DFT（離散フーリエ変換，後の回で解説予定）をベースとして，基底も展開係数も実数の範囲で表せるように修正したものとなっている（DFT に対する FFT と同様に高速演算アルゴリズムが知られている）．右図に，$N = 16$ のときの基底 $\{\boldsymbol{e}_k\}$ のうち番号 k の小さいもの（$k = 0, 1, 2, 3$）を示す．DFT と同様に，0 番目が直流成分（t によらず一定の成分）であり，番号の大きな基底ほど周期の短い（周波数の高い）波の成分に相当していることがわかる．この性質を利用して，DCT はデータ圧縮等に利用される．



音楽などのデータ圧縮手法として有名ないわゆる MP3(MPEG Audio Layer-3) もその一つである．CD に記録された音楽データを MP3 で圧縮すると，典型的にはデータ量を 1/10 程度にすることができる．

$N = 16$ 次元ベクトルに DCT を適用した例を示す．下図左は，

$$\boldsymbol{f} = (0, 0, 0, 0, 10, 10, 10, 10, 8, 6, 4, 2, 0, 0, 0, 0)$$

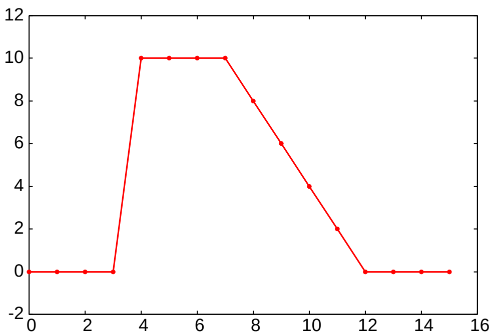
というベクトルの要素を，要素番号を横軸としてグラフに描いたものである．$\boldsymbol{f}$ を DCT して得られる係数 c_k は，$c_k = \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{e}_k$ $(k = 0, 1, \ldots, 15)$ より，次のようになる（以下の表示は小数点以下 2 桁で打ち切っている）．

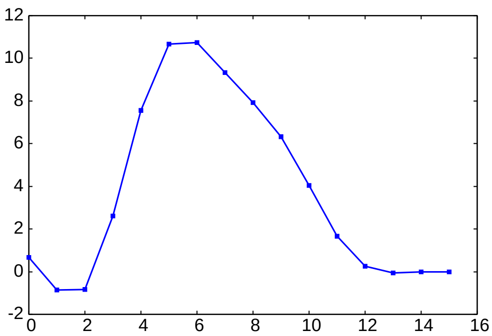
$$\begin{aligned}(c_0, c_1, \ldots, c_{15}) =& (15, 3.27, -14.52, -5.90, 2.23, 2.27, 3.02, 1.73, \\ & 0, -1.09, -2.48, -1.55, 0.16, 1.32, 1.95, 0.97)\end{aligned}$$

これら 16 個の係数値を全て用いて式 (3) の右辺を計算すると，元のベクトル $\boldsymbol{f}$ を完全に復元できる．一方，c_8 から c_{15} までの係数を無視して，つまり c_0 から c_7 までの 8 個の係数のみを用いて，

$$\widetilde{\boldsymbol{f}} = c_0\boldsymbol{e}_0 + c_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + c_7\boldsymbol{e}_7$$

という計算をしてみると，得られるベクトル $\widetilde{\boldsymbol{f}}$ は下図右のようになる．DCT の基底は，番号 k が小さいものほど周波数の低い波の成分となっているため，上記のように小さい番号の基底のみでは，高い周波数の成分を表すことができない．そのため，$\widetilde{\boldsymbol{f}}$ は $\boldsymbol{f}$ よりもなだらかな変化をするものとなっている．





★ 5.7 直交展開とデータ圧縮 (2)

音声や画像のようなパターン情報の場合，その長さや大きさが一定ではなく，要素となる値の数が非常に多い．そのため，直交展開を利用したデータ圧縮を行う場合には，次のような手順をとることが多い (☆ 2)．

1. 対象とするパターンを一定長のベクトルに切り分ける
2. それぞれのベクトルから直交展開の係数を求める
3. 展開係数を加工（量子化する，一部を無視する，等）したのち，可逆圧縮を施す

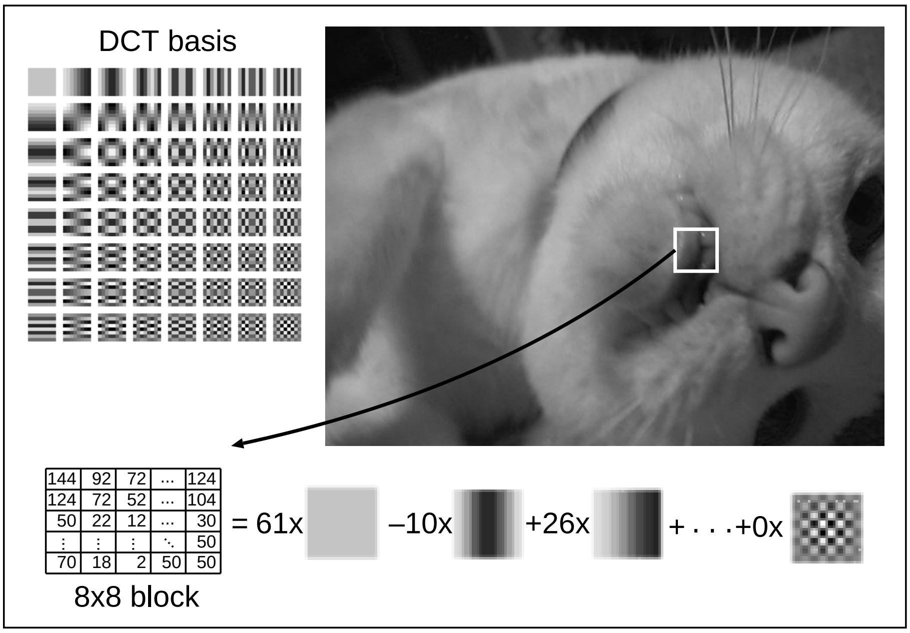
注：この節は，前回資料★ 5.3 のつづきです．

☆ 2) ここでは，基本的な概念を説明している．実用的な圧縮アルゴリズムでは，圧縮効率をあげるために様々な工夫をしており，もっと複雑な処理手順となっている．

★ 5.8 多次元信号の直交展開の例

これまでは変数が 1 次元の信号ばかり扱ってきたが，グレイスケール画像のような 2 次元の信号や，もっと多次元の信号でも直交展開を考えることができる．

2 次元の離散コサイン変換 離散コサイン変換 (DCT) は，2 次元の信号に対しても適用できる．以下の図は，グレイスケール画像から 8×8 画素のブロックを切り出して得られるデータに対する 2 次元 DCT の例である．

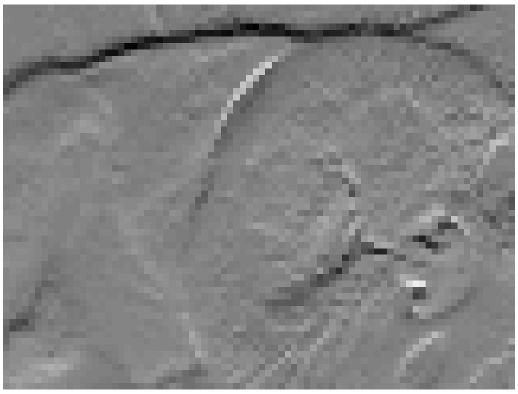


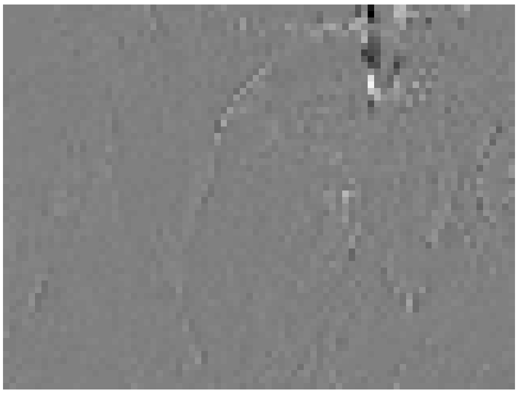
図： 8×8 の 2 次元 DCT の基底 64 個（左上）と，それを用いた展開（下）．

DCT 基底の値は，0 を灰色で，大きな正の値を白で，小さな負の値を黒で可視化してある．

画像中から切り出した 8×8 画素のブロック内の 64 個の画素値が，下側の式の左辺のようになっていたとすると，64 個の DCT 基底を用いてこれを右辺のように展開できる．

以下の図は，上の猫の画像を DCT したときの展開係数を可視化したものである．左の図は上図の基底のうち上から 2 行目の左端の基底に対する展開係数に対応し，右の図は上から 1 行目で左から 3 番目の基底に対する展開係数に対応している．すなわち，これらの画像の画素値一つ一つが，上の猫の画像の 8×8 ブロック一つ一つを展開したときの展開係数の値を表している．





2 次元の DCT は，画像のデータ圧縮（**画像圧縮**）に応用できる．人間の視覚は高周波成分よりも低周波成分の違いに敏感なので，前頁の基底の図の左上の方の基底に対する展開係数のみで画像を表現してやればよい（下図）．例えば下図の上の例では 8×8 画素の画素値を 1 つの係数のみで表現するのでデータ量は $\frac{1}{64}$ であり，真ん中の例では $\frac{1}{16}$ である．幅広く用いられている **JPEG** は，このような原理に基づく画像圧縮手法である (☆ 3)．

☆ 3) 実際の JPEG アルゴリズムでは，高周波の成分を完全に無視するのではなく，高周波の成分に対する係数ほど粗く量子化するという方法をとっている．また，量子化した後の係数をエントロピー符号化してさらに圧縮している．

図: 一部の DCT 基底のみを用いた近似画像（左）とその一部を拡大したもの（右）．上から順に，直流成分のみ（前頁の DCT 基底の左上のもの），左上 4 つのみ，全ての成分を用いたもの（=元画像）を表す．

★6　パターン情報の成分分析 (2) — アナログ信号の分析

★6.1　アナログ信号，周期信号

ここまでの成分分析の話は，変数が離散的で実ベクトルで表せるようなパターン／信号を対象としていたが，ここからしばらくは，変数も値も連続量であり，どちらも一次元であるようなパターン／信号の扱いを考える．このようなパターン（アナログ信号）は，変数 t に対してひとつの値をとる関数として，$f(t)$ のように表すことができる (☆ 4)．第 1 回の授業で説明したように，マイクでとらえた音響信号（AD 変換する前のもの）は，その例のひとつである．

アナログ信号の分析では正弦波をばんばん使うので，ここで復習しておこう．

正弦波: 以下の式で表されるものを**正弦波** (☆ 5) という．

$$f(t) = A\sin(\omega t + \theta) \tag{4}$$

A, ω, θ は定数である．A は**振幅**，ω は**角周波数**，θ は（初期）**位相**と呼ばれる (☆ 6)．角周波数のかわりに**周波数** f を用いて，

$$f(t) = A\sin(2\pi f t + \theta) \tag{5}$$

の形で表すこともある．$\omega = 2\pi f$ である．また，周波数の逆数 $T = \frac{1}{f}$ を**周期**という．周期 1 秒を単位として周波数を数える場合，周波数の単位はヘルツ [Hz] となる (☆ 7)．

Q1. 正弦波 $f(t) = 4\sin\left(2t + \frac{\pi}{3}\right)$ のグラフを描け．この正弦波の周波数と周期はそれぞれいくつか．

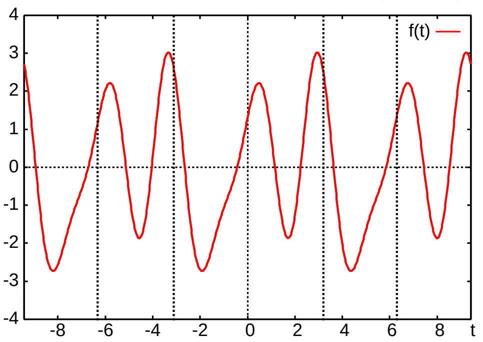
正弦波のように，同じ波形を無限に繰り返す信号を**周期信号** (☆ 8) という．

周期信号: 任意の整数 n に対して $f(t + nT) = f(t)$ を満たす T が存在する場合，$f(t)$ は周期 T の周期信号であるという．

周期 T の周期信号は，周期 $2T, 3T, \ldots$ の周期信号でもある．最小の周期のことを**基本周期**と呼ぶ．また，基本周期の逆数を**基本周波数**と呼ぶ．例えば，正弦波 $\sin t$ の基本周期は 2π であり，$\sin 2\pi t$ の基本周期は 1 である (☆ 9)．

Q2. Q4 の正弦波の基本周期と基本周波数はいくつか．

Q3. $f(t) = \sin t + 2\cos 2t + \sin\left(3t - \frac{\pi}{4}\right)$ の基本周期はいくつか．



☆ 4) 変数に文字 t を使っているので「時間が変数であるようなパターンのみを考えている」と誤解しがちであるが，変数は 1 次元の連続量であれば何でもよい．

☆ 5) sine wave, sinusoidal wave. $\cos(t) = \sin(t + \pi/2)$ だから，cos で表される波も正弦波という．

☆ 6) 振幅: amplitude，周波数: frequency，角周波数: angular frequency，位相: phase，周期: period．ちなみに，波の位相 (phase) は，集合論の位相 (topology) とは別もの．

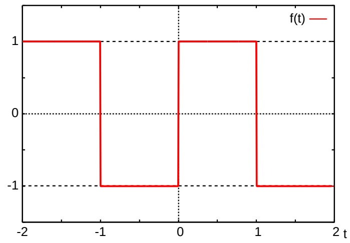
☆ 7) 日本の商用交流電源の周波数は 50 または 60[Hz]．日本の電波時計用標準電波は 40 または 60[kHz]．テレビ放送や携帯電話の電波の周波数は数十から数千 [MHz]．いまどきの CPU のクロック周波数は数 [GHz]．

☆ 8) 周期信号: periodic signal.

☆ 9) $\sin t$ は $t = 0$ から 2π でひとまわり，$\sin 2\pi t$ は 0 から 1 でひとまわり．

正弦波以外の周期信号の例をみよう．次式で表される信号は，t の区間 $[-1, 1)$ のみで定義されているので，このままでは周期信号ではない．

$$f(t) = \begin{cases} -1 & (-1 \le t < 0) \\ 1 & (0 \le t < 1) \end{cases} \tag{6}$$



しかし，同じ波形が無限に繰り返すと考えて周期信号を作ることができる．このような操作をすることを「**周期信号に拡張する**」という．式 (6) のような信号を周期信号に拡張したものは，方形波と呼ばれる．この例では，得られる周期信号の基本周期は 2 である．

☆ 10) 方形波: square wave. 矩形波とも.

Q4. 以下を周期信号に拡張したもののグラフを $-3\pi \le t \le 3\pi$ の範囲で描け．その基本周期を求めよ．これは，のこぎり波 (☆ 11) の一例である．

☆ 11) のこぎり波: saw wave.

$$f(t) = t \qquad (-\pi \le t < \pi) \tag{7}$$

宿題

Q5. 以下を周期信号に拡張したもののグラフを $-6 \le t \le 6$ の範囲で描き，基本周期を答えよ．

$$f(t) = \begin{cases} t + 2 & (-2 \le t < 0) \\ -t + 2 & (0 \le t < 2) \end{cases} \tag{8}$$

Q6. $-\pi \le t \le \pi$ で定義された関数

$$f(t) = \begin{cases} 0 & (-\pi \le t < -\frac{\pi}{2}) \\ \pi & (-\frac{\pi}{2} \le t < \frac{\pi}{2}) \\ 0 & (\frac{\pi}{2} \le t < \pi) \end{cases} \tag{9}$$

について，次の値を求めなさい．

(1) $\displaystyle \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt$

(2) $\displaystyle \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos t dt$

(3) $\displaystyle \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin t dt$

(4) $\displaystyle \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin 99 t dt$