目次

★ 5　パターン情報の成分分析 (1) — 直交展開 （承前）

★ 5.6　多次元信号の直交展開 — 画像の直交展開の例

これまでは,「時間（変数）にともなって変化する気温（値）」のように，変数が 1 次元の信号を考えてきた．記号 t で変数を表すなら，値は $x(t)$ あるいは x_t のように表記できる．変数が量子化されている場合は，複数の x_t の値をならべたベクトルとして，直交展開を考えることができるのだった．

一方，世の中には，変数が 2 次元以上の多次元であるような信号もたくさんある．例えば，画素が縦横に規則的に配列されたグレイスケール画像の場合，画素位置が変数で画素値が値と考えられるので，変数を (i, j) のように表して，値を $x(i, j)$ あるいは $x_{i,j}$ のように表記できる．ここでは，画像を題材として，変数が多次元の信号に対して直交展開を適用する例を紹介する．

★ 5.6.1　画像の直交展開の例その 1

画像のように変数が離散な多次元信号を扱う方法として単純なのは,「値を一定順序で一列に並べて 1 次元信号とみなしてしまう」というものである．大きさが一定のグレイスケール画像が与えられた場合，例えば幅 8 画素，高さ 10 なら，80 個の画素値を決まった順に並べて 80 次元ベクトルとしてみなしてしまう．あとは，普通に直交展開を考えればよい．

ここで紹介するのは，データの統計的な性質を分析する手法である**主成分分析**を画像データに適用した例である．この手法では，データに応じて正規直交基底を計算するので，図からわかるように,「猫の顔」や「人の顔」といった特定のデータをうまく表現できるような基底を得ることができる．このような手法は，画像中の顔を検出したりその顔から個人を識別したりするパターン認識の分野で広く用いられている．詳しくは説明しないが，この方法では，データからある行列を計算し，その固有ベクトルを基底とする．そのため，顔画像データから得られる基底のことを固有顔と呼ぶ (☆ 1).

☆ 1) 高橋の数理情報セミナーあるいは大学院科目「視覚認知計算特論」で登場するかも．

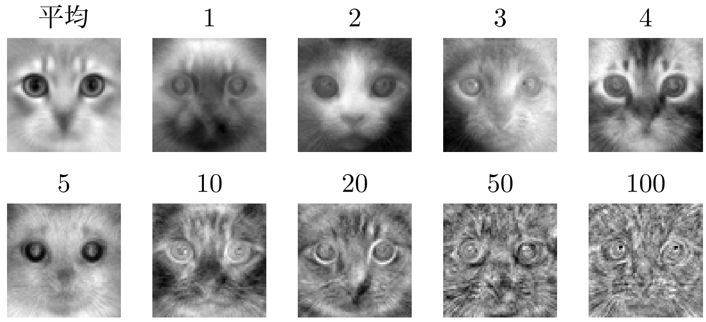


図 1: 猫の固有顔の例．左上の画像は多数の猫の顔画像の平均であり，$1, 2, \ldots$ と記された画像は固有顔を可視化したもの（番号の小さいものほど対応する固有値が大きく,「重要」な基底）．これらの固有顔は正規直交基底を成している．

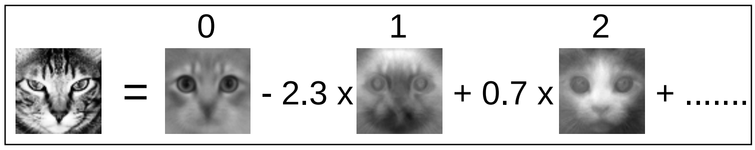


図 2: 固有顔を用いた猫の顔の展開の概念図．画像の上の番号は，固有顔の番号に対応している（0 と記された画像は平均）．

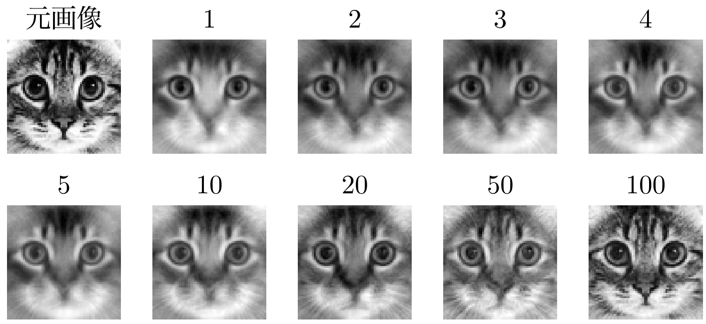


図 3: 固有顔を用いた近似．左上は 4096 個の画素値から成る元画像．それ以外は，画像の上に記された数の基底のみを用いて元画像を近似したもの．例えば，5 と記された画像は，前頁の 1 番から 5 番までの基底のみを用いて元画像を近似しており，5 つの基底に対応する 5 つの展開係数の値のみでこの画像の情報を表現していることになる．

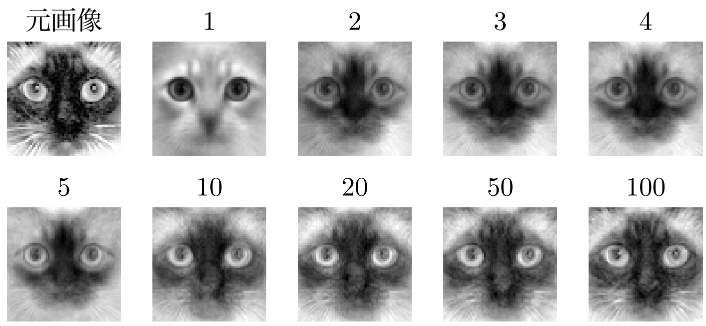


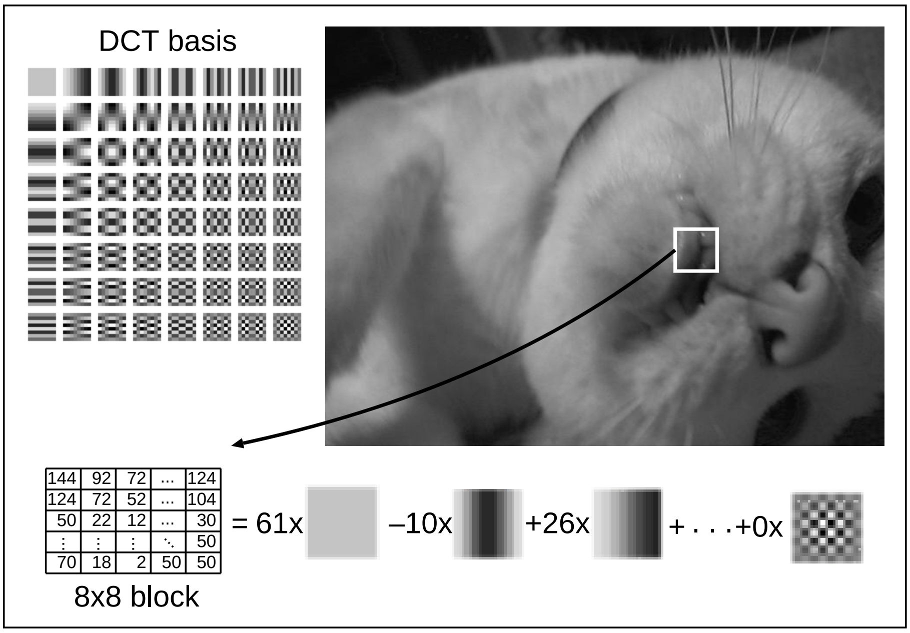
図 4: もうひとつの例．

★ 5.6.2　画像の直交展開の例その 2 – 2 次元 DCT と画像圧縮

グレイスケール画像を変数が 2 次元の信号としてそのまま扱う例を示す．

前回考えた離散コサイン変換 (DCT) は，変数が 2 次元の場合にも拡張することができる (☆ 2)．この 2 次元の DCT は，JPEG 等の画像圧縮等に応用されている．例えば JPEG の場合，画像を縦横 8×8 画素の小さなブロック状に切り出して（下図参照），このブロックごとに 2 次元 DCT を適用する．

☆ 2) 2 次元 DCT の基底を定義する式は，省略します（ウェブ検索したらよいです）．1 次元の DCT を縦横に適用するようなものなので，基本的には 2 つの cos の積の形になります．

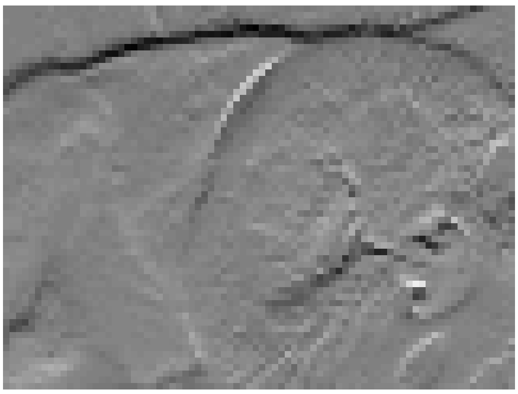


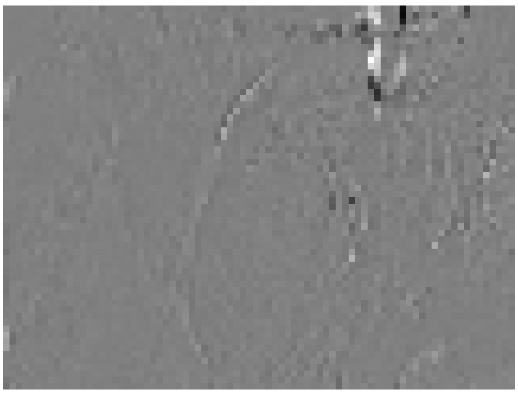
図： 8×8 の 2 次元 DCT の基底 64 個（左上）と，それを用いた展開（下）．

DCT 基底の値は，0 を灰色で，大きな正の値を白で，小さな負の値を黒で可視化してある．

画像中から切り出した 8×8 画素のブロック内の 64 個の画素値が，下側の式の左辺のようになっていたとすると，64 個の DCT 基底を用いてこれを右辺のように展開できる．

以下の図は，上の猫の画像を DCT したときの展開係数を可視化したものである．左の図は上図の基底のうち上から 2 行目の左端の基底に対する展開係数に対応し，右の図は上から 1 行目で左から 3 番目の基底に対する展開係数に対応している．すなわち，これらの画像の画素値一つ一つが，上の猫の画像の 8×8 ブロック一つ一つを展開したときの展開係数の値を表している．





2 次元の DCT は，画像のデータ圧縮（**画像圧縮**）に応用できる．人間の視覚は高周波成分よりも低周波成分の違いに敏感なので，前頁の基底の図の左上の方の基底に対する展開係数のみで画像を表現してやればよい（下図）．例えば下図の上の例では 8×8 画素の画素値を 1 つの係数のみで表現するのでデータ量は $\frac{1}{64}$ であり，真ん中の例では $\frac{1}{16}$ である．幅広く用いられている **JPEG** は，このような原理に基づく画像圧縮手法である (☆ 3).

☆ 3) 実際の JPEG アルゴリズムでは，高周波の成分を完全に無視するのではなく，高周波の成分に対する係数ほど粗く量子化するという方法をとっている．また，量子化した後の係数をエントロピー符号化してさらに圧縮している．

図: 一部の DCT 基底のみを用いた近似画像（左）とその一部を拡大したもの（右）．上から順に，直流成分のみ（前頁の DCT 基底の左上のもの），左上 4 つのみ，全ての成分を用いたもの（=元画像）を表す．

★6　パターン情報の成分分析 (2) — アナログ信号の分析

ここまでの成分分析の話は，変数が離散的で実ベクトルで表せるようなパターン／信号を対象としていたが，ここからしばらくは，変数も値も連続量であるようなパターン／信号の扱いを考える．このようなパターン（アナログ信号）のうち，変数が 1 次元のものは，変数 t に対してひとつの値をとる関数として，$f(t)$ のように表すことができる (☆ 4)．最初の頃の授業で説明したように，マイクでとらえた音響信号（AD 変換する前のもの）は，その例のひとつである．

☆ 4) 変数に文字 t を使っているからといって，「時間が変数であるようなパターンのみを扱っている」わけではない．変数は 1 次元の連続量であればなんでもよい．

★6.1　アナログ信号，周期信号

アナログ信号の分析では正弦波をばんばん使うので，ここで復習しておこう．

正弦波: 以下の式で表されるものを**正弦波** (☆ 5) という．

$$f(t) = A\sin(\omega t + \theta) \quad (1)$$

A, ω, θ は定数である．A は**振幅**，ω は**角周波数**，θ は（初期）**位相**と呼ばれる (☆ 6)．角周波数のかわりに**周波数** f を用いて，

$$f(t) = A\sin(2\pi f t + \theta) \quad (2)$$

の形で表すこともある．$\omega = 2\pi f$ である．また，周波数の逆数 $T = \frac{1}{f}$ を**周期**という．周期 1 秒を単位として周波数を数える場合，周波数の単位はヘルツ [Hz] となる (☆ 7)．

☆ 5) sine wave, sinusoidal wave. $\cos(t) = \sin(t + \pi/2)$ だから，cos で表される波も正弦波という．

☆ 6) 振幅: amplitude, 周波数: frequency, 角周波数: angular frequency, 位相: phase, 周期: period．ちなみに，波の位相 (phase) は，集合論の位相 (topology) とは別もの．

☆ 7) 日本の商用交流電源の周波数は 50 または 60[Hz]．日本の電波時計用標準電波は 40 または 60[kHz]．テレビ放送や携帯電話の電波の周波数は数十から数千 [MHz]．いまどきの CPU のクロック周波数は数 [GHz]．

正弦波のように，同じ波形を無限に繰り返す信号を**周期信号** (☆ 8) という．

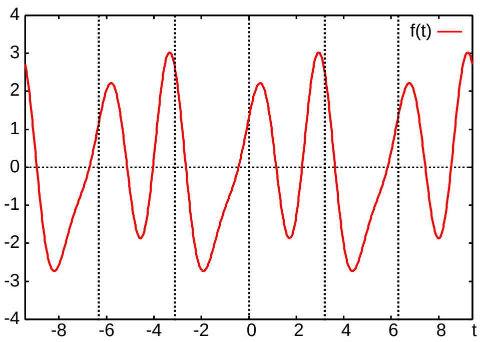
☆ 8) 周期信号: periodic signal.

周期信号: 任意の整数 n に対して $f(t + nT) = f(t)$ を満たす T が存在する場合，$f(t)$ は周期 T の周期信号であるという．

周期 T の周期信号は，周期 $2T, 3T, \ldots$ の周期信号でもある．最小の周期のことを**基本周期**と呼ぶ．また，基本周期の逆数を**基本周波数**と呼ぶ．例えば，正弦波 $\sin t$ の基本周期は 2π であり，$\sin 2\pi t$ の基本周期は 1 である (☆ 9)．

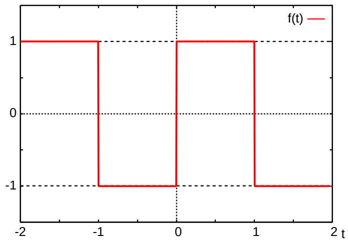
☆ 9) $\sin t$ は $t = 0$ から 2π でひとまわり，$\sin 2\pi t$ は 0 から 1 でひとまわり．

Q1. 正弦波 $f(t) = 4\sin\left(2t + \frac{\pi}{3}\right)$ のグラフを描け．この正弦波の周波数と周期はそれぞれいくつか．
Q2. Q1 の正弦波の基本周期と基本周波数はいくつか．
Q3. $f(t) = \sin t + 2\cos 2t + \sin\left(3t - \frac{\pi}{4}\right)$ の基本周期はいくつか．



正弦波以外の周期信号の例をみよう．次式で表される信号は，t の区間 $[-1, 1)$ のみで定義されているので，このままでは周期信号ではない．

$$f(t) = \begin{cases} -1 & (-1 \leq t < 0) \\ 1 & (0 \leq t < 1) \end{cases} \tag{3}$$



しかし，同じ波形が無限に繰り返すと考えて周期信号を作ることができる．このような操作をすることを「**周期信号に拡張する**」という．式 (3) のような信号を周期信号に拡張したものは，方形波と呼ばれる．この例では，得られる周期信号の基本周期は 2 である．

☆ 10) 方形波: square wave. 矩形波とも．

Q4. 以下を周期信号に拡張したもののグラフを $-3\pi \leq t \leq 3\pi$ の範囲で描け．その基本周期を求めよ．これは，のこぎり波 (☆ 11) の一例である．

$$f(t) = t \qquad (-\pi \leq t < \pi) \tag{4}$$

☆ 11) のこぎり波: saw wave.

★ 6.2　周期信号を三角関数の和で表す

前回までに，N 本の N 次元実ベクトルから成る正規直交基底 $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_N\}$ を用いると，任意の N 次元実ベクトル $\boldsymbol{x}$ を $\boldsymbol{x} = c_1\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + c_N\boldsymbol{u}_N$ と直交展開でき,「成分」$\boldsymbol{u}_k$ に対する係数 c_k は $c_k = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{u}_k$ となることを学んだ．

実は，同じ考え方で，アナログ周期信号を展開することができる．例えば，周期 2π の周期信号 $f(t)$ は，$\sin t, \sin 2t, \ldots, \cos t, \cos 2t, \ldots$ といった正弦波を成分として，次のように展開できる．

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt) \tag{5}$$

$$= \frac{a_0}{2} + a_1 \cos t + b_1 \sin t + a_2 \cos 2t + b_2 \sin 2t + \cdots \tag{6}$$

$a_0, a_1, a_2, \ldots, b_1, b_2, \ldots$ が展開係数である．このような展開を，$f(t)$ の**フーリエ級数展開**という．詳しくは次回説明する．

以下，Google Colab の Notebook でいくつか例を示す．