目次



# ★6　パターン情報の成分分析 (2) — アナログ信号の分析（承前）

前回の授業では，アナログ周期信号を三角関数の和で表せそうだ，様々な周期の正弦波を成分として展開できそうだ，という話になった．今回は，そこで登場した「フーリエ級数展開」について説明する．

## ★6.3　フーリエ級数展開

### ★6.3.1　周期 $2\pi$ の周期信号のフーリエ級数展開

---

周期 $2\pi$ の周期信号 $f(t)$ は次式の形で表せる (☆ 1)．

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt) \tag{1}$$

$$= \frac{a_0}{2} + a_1 \cos t + b_1 \sin t + a_2 \cos 2t + b_2 \sin 2t + \cdots \tag{2}$$

これを，$f(t)$ の**フーリエ級数展開** (☆ 2) という．$a_k, b_k$ は次式で与えられる．

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt \tag{3}$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt \; dt \qquad (k = 1, 2, 3, \dots) \tag{4}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt \; dt \qquad (k = 1, 2, 3, \dots) \tag{5}$$

これらの展開係数は**フーリエ係数**と呼ばれる．

---

☆ 1) ［発展］ $f(t)$ は周期 $2\pi$ ならどんな関数でもよいわけではなく，「二乗可積分」($\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt < \infty$) でなければならない．

☆ 2) フーリエ級数展開: Fourier series expansion. フーリエ (J. Fourier, 1768–1830): フランスの数学者．熱伝導の研究からフーリエ級数展開を導いた．

フーリエ級数展開の式の $k$ 番目の項 $a_k \cos kt$ と $b_k \sin kt$ に注目すると，これらはいずれも周期 $\frac{2\pi}{k}$（周波数 $\frac{k}{2\pi}$）の正弦波である．したがって，上記の式は，「**周期 $2\pi$ の任意の周期信号は，基本周期 ($2\pi$) の正弦波と，周期がその半分 ($\pi$)，3 分の 1($\frac{2}{3}\pi$)，4 分の 1($\frac{1}{2}\pi$)，… の正弦波の重ね合わせ（＋定数項）で表せる**」ということを意味している (☆ 3)．

☆ 3) 周期のかわりに周波数で表現すると，**基本周波数の正弦波と，周波数がその 2 倍，3 倍，4 倍，…**

---

**Q1.** 以下を周期信号に拡張したもののグラフを描け．そのフーリエ係数を求め，フーリエ級数展開せよ．

$$f(t) = \begin{cases} -\pi & (-\pi \le t < 0) \\ \pi & (0 \le t < \pi) \end{cases} \tag{6}$$

### ★ 6.3.2　対称性の利用

任意の実数 $t$ に対して $f(-t) = f(t)$ が成り立つような関数 $f(t)$ を**偶関数**といい，$g(-t) = -g(t)$ が成り立つような関数 $g(t)$ を**奇関数**という (☆ 4)．例えば，$t^2$ や $\cos kt$ は偶関数であり，$t$ や $\sin kt$ は奇関数である $(k = 1, 2, \dots)$．偶関数と奇関数に関して，次のことがいえる．

☆ 4) 整数の偶奇と異なり，偶関数でも奇関数でもない関数も存在することに注意．どんな関数も偶関数と奇関数の和として表せる．

- (偶関数) × (偶関数) は偶関数，(偶) × (奇) は奇，(奇) × (奇) は偶 (☆ 5)．例えば，$f(t)$ を偶関数，$g(t)$ を奇関数として，$h(t) = f(t)g(t)$ とおくと，

$$h(-t) = f(-t)g(-t) = f(t)(-g(t)) = -f(t)g(t) = -h(t) \tag{7}$$

より，$h(t)$ は奇関数となる．

☆ 5) 偶数奇数の積とは異なる結果であることに注意．

- $f(t)$ を偶関数，$g(t)$ を奇関数とすると，実数 $T$ に対して以下が成り立つ．

$$\int_{-T}^{T} f(t)dt = 2\int_{0}^{T} f(t)dt \qquad \int_{-T}^{T} g(t)dt = 0 \tag{8}$$

この性質を利用すると，フーリエ級数展開したい関数が偶関数や奇関数である場合には，展開係数の計算をさぼることができる．

---

**Q2.** 「(偶関数) × (偶関数) は偶関数」,「(奇関数) × (奇関数) は偶関数」を証明しなさい．

**Q3.** 以下を周期信号に拡張したもののグラフを描け．そのフーリエ係数を求め，フーリエ級数展開せよ．これは Q1 の信号の位相を $\frac{\pi}{2}$ ずらしたものになっている．

$$f(t) = \begin{cases} -\pi & (-\pi \le t < -\frac{\pi}{2} \text{ または } \frac{\pi}{2} \le t < \pi) \\ \pi & (-\frac{\pi}{2} \le t < \frac{\pi}{2}) \end{cases} \tag{9}$$

**Q4.** $f(t) = t \quad (-\pi \le t < \pi)$ を周期信号に拡張したもの（のこぎり波）のフーリエ係数が次式になることを示せ (☆ 6)．

☆ 6) ヒント： 部分積分．

$$a_k = 0 \quad (k = 0, 1, \dots), \quad b_k = (-1)^{k+1}\frac{2}{k} \quad (k = 1, 2, \dots) \tag{10}$$

### ★ 6.3.3　一般の周期関数のフーリエ級数展開

上記のフーリエ級数展開の議論は周期 $2\pi$ の信号に限ったが，実際には任意周期の周期信号（周期 $T$ とする）に対してフーリエ級数展開を定義できる (☆ 7).

☆ 7) $t' = \frac{2\pi}{T}t$ と変数変換して考えればよい．

---

周期 $T$ の周期信号 $f(t)$ は次式のようにフーリエ級数展開できる．

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos\omega_0 kt + b_k \sin\omega_0 kt) \tag{11}$$

ただし，$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ である．フーリエ係数 $a_k, b_k$ は次式で与えられる．

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)dt \tag{12}$$

$$a_k = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos\omega_0 kt\ dt \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots) \tag{13}$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin\omega_0 kt\ dt \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots) \tag{14}$$

---

この場合，$a_k \cos\omega_0 kt$ と $b_k \sin\omega_0 kt$ はいずれも周期 $\frac{T}{k}$（周波数 $\frac{k}{T}$）の正弦波である．したがって，周期 $2\pi$ のときと同様に，上記の式は，
**「周期 $T$ の任意の周期信号は，基本周期 $(T)$ の正弦波と，周期がその半分 $(\frac{T}{2})$，3 分の 1，4 分の 1，… の正弦波の重ね合わせ（+定数項）で表せる」**
ということを意味している (☆ 8).

☆ 8) 周波数でいえば，**基本周波数の正弦波と，周波数がその 2 倍，3 倍，4 倍，…**

---

**Q5.** 以下を周期信号に拡張したもののグラフを描きなさい．そのフーリエ係数を求め，フーリエ級数展開しなさい．

$$f(t) = \begin{cases} 0 & (-1 \le t < -\frac{1}{2} \text{ または } \frac{1}{2} \le t < 1) \\ 1 & (-\frac{1}{2} \le t < \frac{1}{2}) \end{cases} \tag{15}$$

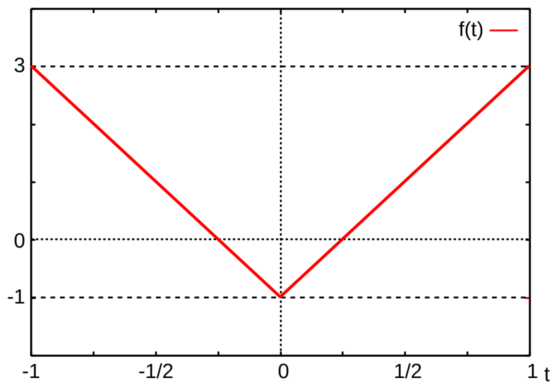
**Q6.** $-1 \le t \le 1$ で定義された信号 $f(t)$ のグラフが右図の通りであるとき，次の問に答えなさい．

(1) $f(t)$ を $t$ の式で表しなさい．

(2) $f(t)$ を周期信号に拡張したものの基本周期 $T$ と基本角周波数 $\omega_0$ を答えなさい．

(3) $f(t)$ を周期信号に拡張したもののフーリエ係数（記号はこの資料と同じもの ( $a_k, b_k$ ) を使うこと）を求めなさい．ただし，最後の解答は三角関数を含まない形で表すこと．

(4) $f(t)$ をフーリエ級数展開した式を書きなさい．ただし，フーリエ係数の番号 $k$ が 5 以下のものに対応する項は省略せずに全て書くこと．



### ★ 6.3.4 一部の項を用いた近似

フーリエ級数展開の式には無限個の項があるが，その中で番号 $k$ の小さいもの（周波数の低い正弦波）だけを用いた式を考えてみよう．つまり，

$$f_n(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kt + b_k \sin kt) \qquad (n = 0, 1, 2, \dots) \tag{16}$$

$$= \frac{a_0}{2} + a_1 \cos t + b_1 \sin t + \cdots + a_n \cos nt + b_n \sin nt \tag{17}$$

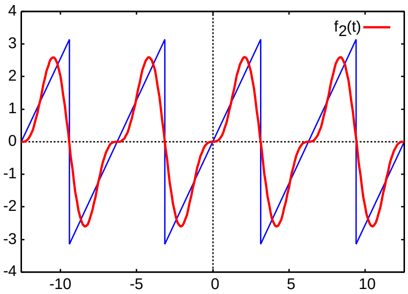
という形の式である (☆ 9)．

☆ 9) $f_0(t) = \frac{a_0}{2}$ とする．

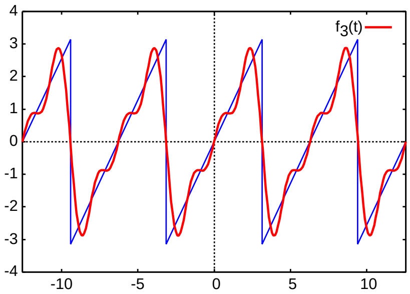
右の図は，Q4 のこぎり波の例で，元の信号 $f(t)$ と $f_n(t)$ を重ねて描いたグラフである．$n$ が大きくなるにつれて，$f_n(t)$ が $f(t)$ に近づいていく様子がわかる．

より詳しくみると，$n$ が小さいときは，$f_n(t)$ は周波数の低い正弦波のみを足し合わせたものであるため $f(t)$ の大まかな近似になっているが，$n$ が大きくなって高い周波数の正弦波が加わっていくにつれて細部まで近似されるようになっている．

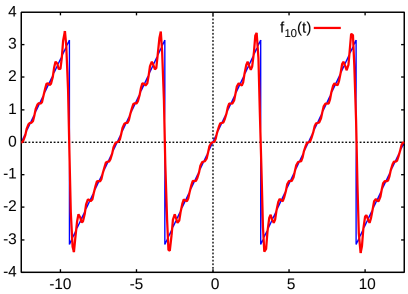
$f_2(t) = 2\sin t - \sin 2t$



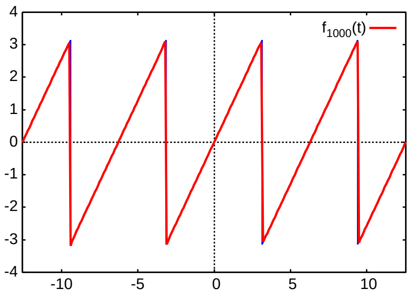

$f_3(t) = 2\sin t - \sin 2t + \frac{2}{3}\sin 3t$




$f_{10}(t) = \sum_{k=1}^{10}(-1)^{k+1}\frac{2}{k}\sin kt$




$f_{1000}(t) = \sum_{k=1}^{1000}(-1)^{k+1}\frac{2}{k}\sin kt$




## ★ 6.4 ［発展］関数の内積と直交展開

実フーリエ級数展開は，関数の直交展開の一種である．関数同士の内積を定義してそれをもとに正規直交基底を考えると，実ベクトルの場合と同様の展開ができる (☆ 10)．

☆ 10) この辺の数学的にきちんとした議論は，数理情報学科 4 年生向けの数学系科目で学ぶことができる．

### ★ 6.4.1 周期信号同士の内積とノルム

変数も値も実数をとる関数 $f(t), g(t)$ がともに周期 $T$ の周期関数であるとき (☆ 11)，$f(t)$ と $g(t)$ の**内積**を $(f(t), g(t))$ と表記し (☆ 12)，次のように定義する．

$$(f(t), g(t)) = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)g(t)dt \tag{18}$$

実ベクトル同士の内積と同様に，この値は任意の実数値をとる．この値が 0 となる場合，「$f(t)$ と $g(t)$ は**直交する**」という．また，$f(t)$ の**ノルム**を $\|f(t)\|$ と表記し，実ベクトルのノルムと同様に「自分自身との内積の平方根」で定義する．

$$\|f(t)\| = \sqrt{(f(t), f(t))} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \{f(t)\}^2 dt} \tag{19}$$

☆ 11) 当然，拡張して周期 $T$ の周期関数になるものも含む．

☆ 12) $f(t) \cdot g(t)$ と表すことにしてもよいが，「$f(t)$ と $g(t)$ の積」と紛らわしいので，この資料ではこのように表記する．$(f, g)$ と略記することもある．

### ★ 6.4.2　直交系，正規直交系，正規直交基底

互いに直交する関数の集合を**直交系**といい，互いに直交しかつノルムが 1 である関数の集合を**正規直交系**という．いずれも，可算無限個の関数を含み得る．ある正規直交系 $\{u_1(t), u_2(t), \ldots\}$ において，

$$\forall k\ (f(t), u_k(t)) = 0 \quad \text{ならば} \quad f(t) = 0 \tag{20}$$

が成り立つ場合，この正規直交系を**正規直交基底**という．

### ★ 6.4.3　直交展開

$\{u_1(t), u_2(t), \ldots\}$ が正規直交基底ならば，基底を成す関数と同じ周期をもつ任意の関数 $f(t)$ を

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k u_k(t) \tag{21}$$

と展開できる．このとき，展開係数 $c_k$ は

$$c_k = (f(t), u_k(t)) \tag{22}$$

で与えられる．

### ★ 6.4.4　直交展開としての実フーリエ級数展開

簡単のため，ここでは周期 $2\pi$ の場合を考える．一般の周期でも同様の議論が成り立つ．次のようにして，フーリエ級数展開は直交展開の一つであることがわかる．

1. $1, \sqrt{2}\cos mt, \sqrt{2}\sin nt\ (m, n = 1, 2, \ldots)$ は上で定めた内積のもとで正規直交基底を成す (☆ 13)．
2. したがって任意の周期 $2\pi$ の関数 $f(t)$ を

$$f(t) = \alpha_0 \cdot 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \sqrt{2}\cos kt + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \sqrt{2}\sin kt \tag{23}$$

と展開できる．ただし，展開係数 $\alpha_0, \alpha_k, \beta_k (k = 1, 2, \ldots)$ は

$$\alpha_0 = (f(t), 1) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt \tag{24}$$

$$\alpha_k = (f(t), \sqrt{2}\cos kt) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cdot \sqrt{2}\cos ktdt \tag{25}$$

$$\beta_k = (f(t), \sqrt{2}\sin kt) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cdot \sqrt{2}\sin ktdt \tag{26}$$

と表される．

3. $a_0 = 2\alpha_0$，$a_k = \sqrt{2}\alpha_k, b_k = \sqrt{2}\beta_k$ とおくと，周期 $2\pi$ の周期信号のフーリエ級数展開と同じ式が得られる．

☆ 13) 互いに直交しノルムが 1 であることは高校数学の知識（三角関数の公式と積分）で確認できる．